Unidad II: Transformaciones geométricas

Conceptos básicos referentes a las transformaciones geométricas afines en 2D y 3D, utilizadas en Computación Gráfica.

La traslación, escalamiento, y rotación.

Dichas transformaciones son utilizadas directamente por aplicaciones y en muchos paquetes de subrutinas gráficas.

2.1 Transformaciones bidimensionales

Las transformaciones bidimensionales comprenden la traslación, rotación y Escalación.

2.1.1 Traslación

Se traslada cada punto P(x,y) dx unidades paralelamente al eje x y dy unidades paralelamente al eje y, hacia el nuevo punto P'(x',y'). Las ecuaciones quedan:

$$X' = X + d_x \qquad y' = y + d_y \qquad \text{Ec.1}$$

Si se definen los vectores columna queda:

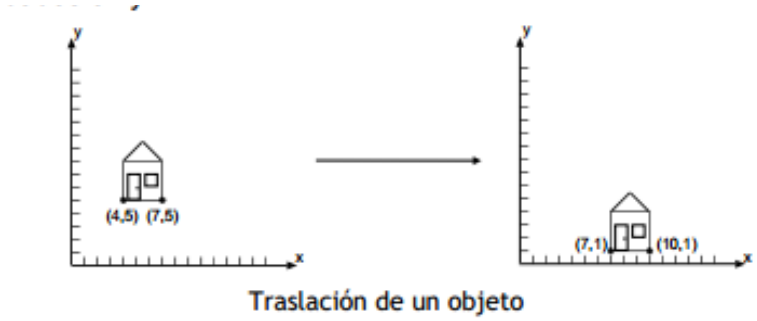
$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix} \qquad \text{Ec. 2}$$

Entonces a ecuación 1 puede ser expresada como:

$$P' = P + T \qquad \text{Ec.3}$$

Una forma de efectuar la traslación de un objeto es aplicándole a cada punto del mismo la ecuación 1. Para trasladar todos los puntos de una línea, simplemente se traslada los puntos extremos. En la figura se muestra el efecto de trasladar un

objeto 3 unidades en x y -4 unidades en y.



Esto se cumple también para el escalamiento y la rotación.

2.1.2 Rotación

Los puntos también pueden ser rotados un ángulo θ con respecto al origen

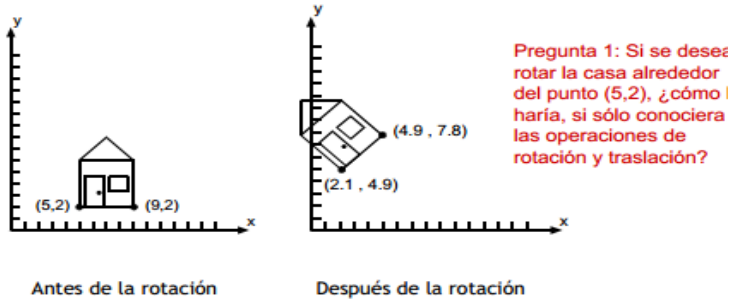
$x' = x \cdot \cos\theta - y \cdot \operatorname{sen}\theta$

$y' = x \cdot \operatorname{sen}\theta + y \cdot \cos\theta$

En forma matricial

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}_{\text{Matriz R}} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow P' = R \cdot P$$

En la figura se muestra la rotación de la casa 45°, con respecto al origen.



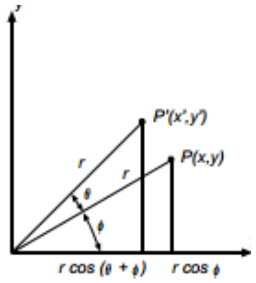
Derivación de la ecuación de rotación (Ec. 6)

La rotación de un ángulo θ transforma al punto P(x,y) en P'(x',y') Por trigonometría tenemos:

$$x = r \cdot \cos\phi\,, \qquad y = r \cdot sen\phi\,, \qquad \text{Ec. 8}$$

$$x' = r \cdot \cos(\theta + \phi) = r \cdot \cos\phi \cdot \cos\theta - r \cdot sen\phi \cdot sen\theta$$

$$y' = r \cdot sen(\theta + \phi) = r \cdot \cos\phi \cdot sen\theta + r \cdot sen\phi \cdot \cos\theta \qquad \text{Ec. 9}$$



2.1.3 Escalación

El escalamiento se hace con un factor S_x en el eje x y en un factor S_y en el eje y.

Escalamiento uniforme $S_x = S_y$

Escalamiento diferencial.

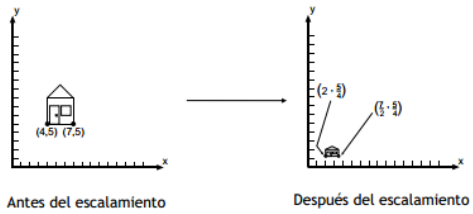
La transformación de escalamiento puede expresarse con las siguientes multiplicaciones

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix}}_{\text{Matriz S}} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow P' = S \cdot P$$

Se escala a ½ en el eje x y a ¼ en el eje y.

El escalamiento se efectúa con respecto al origen;



Escalonamiento no uniforme de un objeto con respecto al origen (0,0)

2.2 Coordenadas homogéneas y representación matricial

Las representaciones matriciales obtenidas hasta ahora para traslación, escalamiento y rotación son, respectivamente:

P' = T + P

P' = S · P

P' = R· P

Problema: La traslación es tratada de forma diferente

Solución: Utilizar un sistema de coordenadas homogéneas

En las coordenadas homogéneas cada punto se representa siguiendo la forma (x,y,W). Dos vectores en coordenadas homogéneas (x,y,W) y (x',y',W') representan al mismo punto si y sólo si uno es múltiplo del otro.

Para W ≠ 0 se obtiene los puntos x / W, y / W a los cuales se les llama “coordenadas cartesianas del punto homogéneo”.

Las ecuaciones de traslación (Ec. 1) pueden expresarse como una matriz 3x3 en coordenadas homogéneas.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Esta ecuación puede ser representada de la siguiente forma:

$$P' = T(d_x, d_y) \cdot P,$$

donde

$$T(d_x, d_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Supóngase que un punto P es trasladado por T (dx1,dy1) al punto P' y luego es trasladado por T(dx2,dy2) al punto P''.

$$P' = T(d_{x1}, d_{y1}) \cdot P,$$

$$P'' = T(d_{x2}, d_{y2}) \cdot P'$$

Sustituyendo la ecuación 13 en la ecuación 14, se obtiene:

$$P'' = T(d_{x2}, d_{y2}) \cdot \left(T(d_{x1}, d_{y1}) \cdot P\right) = \left(T(d_{x2}, d_{y2}) \cdot T(d_{x1}, d_{y1})\right) \cdot P$$

El producto matricial es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x2} \\ 0 & 1 & d_{y2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x1} \\ 0 & 1 & d_{y1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x1} + d_{x2} \\ 0 & 1 & d_{y1} + d_{y2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

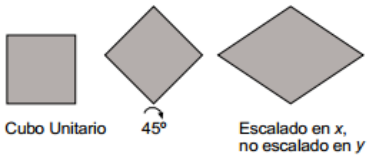
Por lo tanto la traslación neta es T (dx1 + dx2 , dy1 + dy2). El producto matricial efectuado no es más que la composición de T (dx1,dy1) y T(dx2,dy2).

Por otro lado, puede verificarse con facilidad que la transformación inversa de una traslación T(dx,dy) no es más que T-1 (dx,dy) = T(-dx,-dy).

Un procedimiento similar al efectuado con la traslación puede aplicarse al escalamiento, obteniendo una nueva representación matricial de la ecuación 4, de la forma siguiente:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

El producto de una secuencia arbitraria de matrices de rotación, traslación y escalamiento constituyen transformaciones a fines, teniendo la propiedad de conservar el paralelismo de las líneas, pero no longitudes ni ángulos.



Un cubo unitario rotado 45º en sentido horario y luego escalado no uniformemente. El resultado es una transformación afín de la figura inicial, donde se mantiene el paralelismo de las líneas, pero no las longitudes ni ángulos originales.

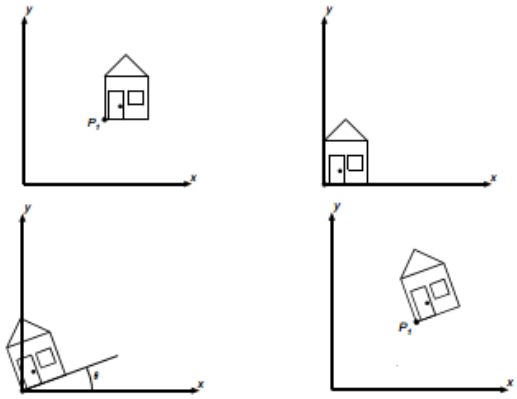
Sesgado (shear).

Existen dos tipos de sesgados en 2D, con respecto al eje x y con respecto al eje y.

Un cubo unitario y el efecto de aplicarle la transformación de sesgado.

En cada caso la longitud de las líneas oblicuas es mayor a 1.

2.3 Composición de transformaciones bidimensionales



Rotación de un objeto en un ángulo q con respecto al punto P1

La transformación neta aplicada es:

$$T(x_1, y_1)\cdot R(\theta)\cdot T(-x_1, -y_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta & 0 \\ sen\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_1 \\ 0 & 1 & -y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta & x_1(1-\cos\theta) + y_1 sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta & y_1(1-\cos\theta) - x_1 sen\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{Ec. 30}$$

Un enfoque similar puede usarse para escalar un objeto con respecto a un punto arbitrario P1

.

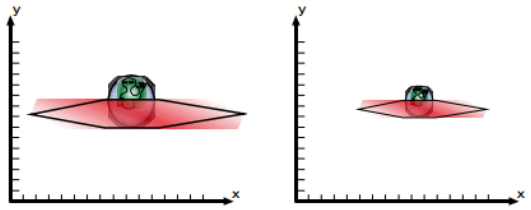
$$T(x_1, y_1)\cdot S(s_x, s_y)\cdot T(-x_1, -y_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_1 \\ 0 & 1 & -y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} s_x & 0 & x_1(1-s_x) \\ 0 & s_y & y_1(1-s_y) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{Ec. 31}$$

Es frecuente el deseo de realizar un escalamiento o rotación con respecto al centro geométrico de una figura. Para lograr este propósito se puede aplicar el método recientemente expuesto de forma que el punto arbitrario

P1 corresponda ahora a las coordenadas del centro Pc(xc,yc). Así el escalamiento in-situ no sería más que aplicar y la rotación in-situ correspondería a La siguiente figura muestra un escalamiento aplicado a un objeto que se asemeja a un

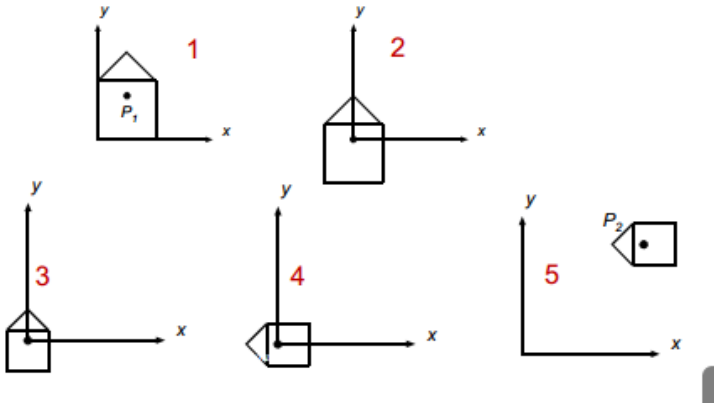
OVNI.



Puede darse el caso de querer escalar, rotar y luego posicionar un objeto como la casa mostrada en la figura siguiente, con P1 como centro de la rotación y el escalamiento.

Trasladar P1 al origen, efectuar el escalamiento y la rotación, y luego trasladar desde el origen a la nueva posición P2. La matriz que represente dichas transformaciones corresponde a:

$$T(x2, y2)\cdot R(\theta)\cdot S(sx,s\,y)\cdot T(-x1,-y1)$$



Se sabe que, en general, la multiplicación de matrices no es conmutativa. Sin embargo, al aplicar transformaciones fundamentales

de traslación, escalamiento y rotación se dan casos especiales donde el producto de matrices es conmutativo.

Una matriz de traslación seguida de otra matriz de traslación pueden conmutarse sin afectar el resultado. De forma semejante, una matriz de escalamiento seguida de otra matriz de escalamiento pueden multiplicarse en cualquier orden, así como una matriz de rotación seguida de otra matriz de rotación.

Otro caso donde la multiplicación de este tipo de matrices es conmutativa corresponde a tener una matriz de rotación y otra de escalamiento uniforme (sx = sy).

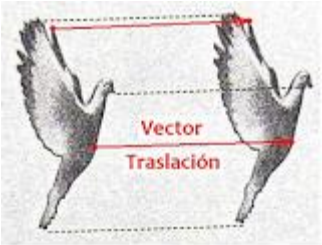
En estos casos no es necesario preocuparse por el orden en la manipulación de las matrices.

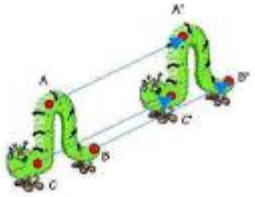
2.3.1 Traslaciones, rotaciones y escalaciones

Traslación

Se pueden encontrar varias definiciones de traslación. Una traslación es el movimiento en línea recta de un objeto de una posición a otra. Movimiento de una figura, sin rotarla ni voltearla. "Deslizar".

La figura sigue viéndose exactamente igual, solo que en un lugar diferente. Se aplica una transformación en un objeto para cambiar su posición a lo largo de la trayectoria de una línea recta de una dirección de coordenadas a otra.





Rotación

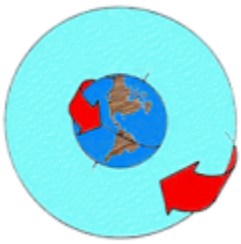
Para rotar un objeto (en este caso bidimensional), se ha de determinar la cantidad de grados en la que ha de rotarse la figura. Para ello, y sin ningún tipo de variación sobre la figura, la cantidad de ángulo ha de ser constante sobre todos los puntos.

Otra forma de conseguir la rotación, respecto a un punto de movimiento, es fijar los diferentes puntos respecto a un punto de fijación siendo los puntos que forman la figura, relativos a este.

La fórmula a aplicar en este último supuesto, sería la siguiente:

X' = X * Cos (àngulo) - Y * Sin (ángulo)

Y' = Y * Cos (ángulo) - X * Sin (ángulo)



La tierra rotanto vista desde el polo norte.

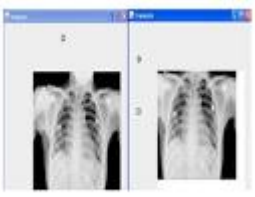
Escalación

Una transformación para alterar el tamaño de un objeto se denomina Escalación.

Dependiendo del factor de Escalación el objeto sufrirá un cambio en su tamaño pasando a ser mayor, o menor en su segmento de longitud.

Esta es la transformación del objeto especialmente interesante, pues con ella se consigue el efecto Zoom.

Ejemplos:



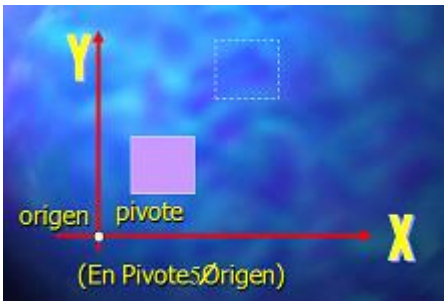
2.3.2 Rotación de punto de pivote general

El punto de pivote o punto de rotación es un punto de referencia que permite realizar un giro. Para poder realizar este giro se requiere de un angulo determinado. Se siguen los siguientes pasos para realizar el punto de pivote

Tres pasos fundamentales para llevar a cabo el punto de pivote:

1. Trasladar el pivote (xp,yp) al origen.

   x’=x-m; y’=y-n



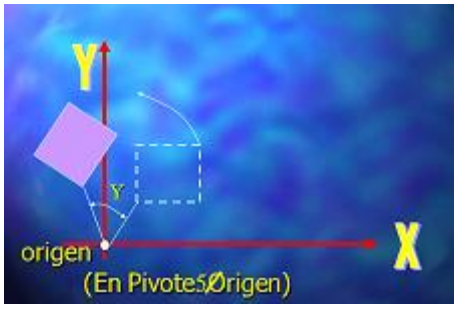
2. Rotar los puntos trasladados U grados alrededor del origen, obteniendo el nuevo punto (x’’y’’)

   x’’=x’*ços(U) - y’*sen(U)

   y’’=y’*ços(U)+x’*sen(U); sustituyendo :

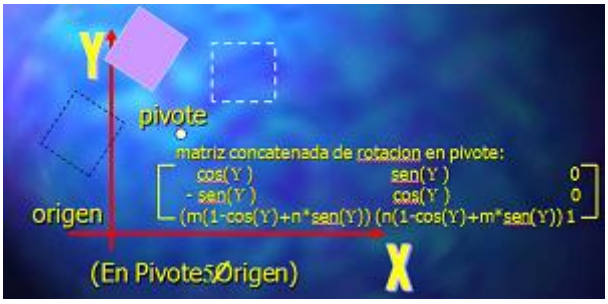
   x’’=(x-m)*cos(U)-(y-n)*sen(U)

   y’’=(y-n)*cos(U) + (x-m)*sen(U)



3. Trasladar inversamente el pivote a su lugar de origen.

   x’’’=x’’+m ; y’’’=y’’+n

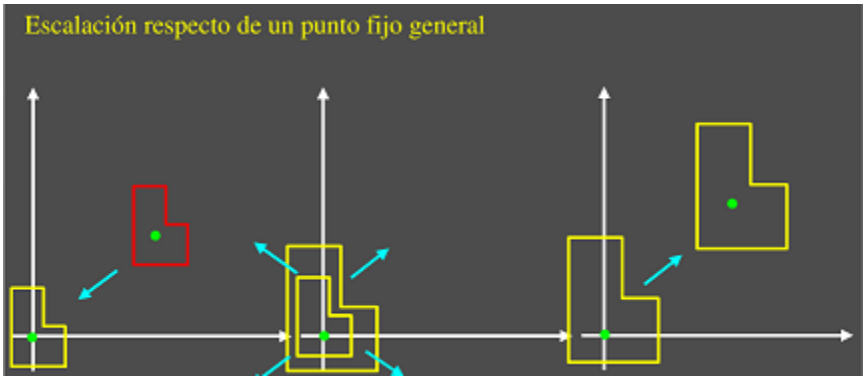


2.3.3 Escalación del punto fijo general

Se entiende por escalación de punto fijo a la composición bidimensional que permite sacar escala de un dibujo en alguna de las posiciones del plano, utilizando como función el punto de origen y luego regresando al objeto a su punto fijo..

Para llevar a cabo la escalación de punto fijo se siguen los siguientes pasos.

1. El objeto cambia de posición del punto fijo al punto de origen utilizando la traslación.
2. Se saca escala del objeto con respecto del origen de las coordenadas.
3. Se utiliza la traslación inversa del paso 1 para regresar el objeto al punto fijo pero escalado.



2.3.4 Propiedades de concatenación

La multiplicación de matrices es asociativa. Para tres matrices cualesquiera, A, B y C, el producto matricial A · B · C se puede llevar a cabo al multiplicar primero A por B o multiplicar B por C:

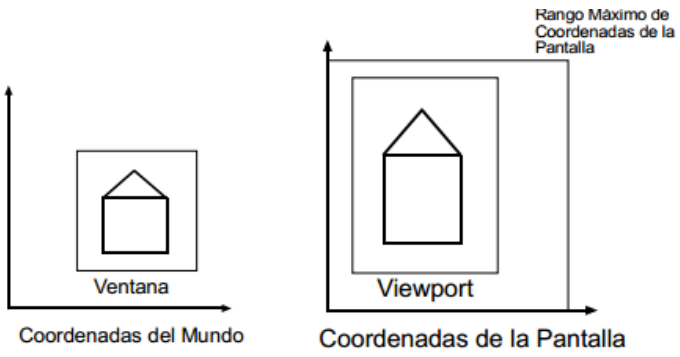
A · B · C = (A · B) · = A · (B · C) (5-36)

Por tanto, podemos evaluar los productos matriciales al utilizar una agrupación asociativa ya sea de izquierda a derecha o de derecha a izquierda.

Por otro lado, los productos de la transformación tal vez no sean conmutativos en general, el producto matricial $A \cdot B$ no es igual que $B \cdot A$. Esto significa que si queremos trasladar y girar un objeto, debemos tener cuidado sobre el sentido en que se evalúa la matriz compuesta (figura 5-13). Para algunos casos especiales, como una secuencia de transformaciones todas de la misma clase, la multiplicación de las matrices de transformación es conmutativa. Como por ejemplo, se podrían realizar dos rotaciones sucesivas en cualquier sentido y la posición final sería la misma. Esta propiedad conmutativa se aplica también para dos traslaciones sucesivas o dos escalaciones sucesivas. Otro par conmutativo de operaciones es la rotación y la escalación uniforme (s_x,s_y).

2.4 Transformación ventana-área de vista

Dadas las primitivas de salida especificadas en coordenadas del mundo debe especificarse como llevar dichas coordenadas a coordenadas de pantalla para que puedan ser mostradas. Se debe especificar una región rectangular (ventana) en coordenadas de mundo y una correspondiente región rectangular en coordenadas de la pantalla (viewport), en la cual se efectuará el mapeo de la ventana del mundo.



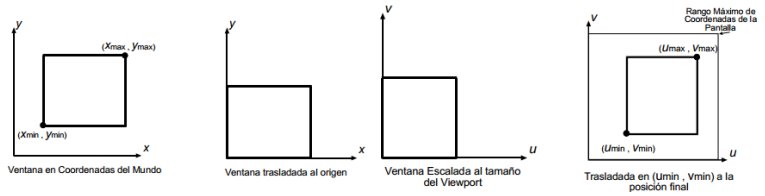
La ventana en coordenadas del mundo y el viewport en coordenadas de pantalla determinan el mapeo que es aplicado a todas las primitivas en coordenadas del mundo.

Dados:

- la ventana (en coordenadas del mundo)

- el viewport,

la matriz de transformación que mapea la ventana a coordenadas de pantalla puede ser desarrollada mediante la composición de tres transformaciones simples sugeridas en la figura siguiente:



Pasos para transformar una ventana en coordenadas del mundo al Viewport en coordenadas de pantalla

Como se puede apreciar en lo anterior, la ventana, especificada por su esquina inferior izquierda y su esquina superior derecha, es primero trasladada al origen de las coordenadas del mundo. Luego, la ventana es escalada para coincidir con las dimensiones del viewport.

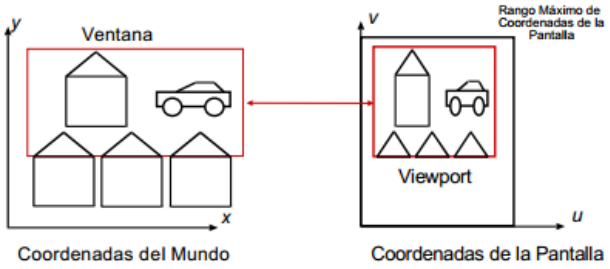
Posteriormente, se utiliza una traslación para posicionar el viewport. La matriz que corresponde a estas transformaciones Mwv es:

$$M_{wv} = T(u_{min}, v_{min}) \cdot S\left(\frac{u_{max} - u_{min}}{x_{max} - x_{min}}, \frac{v_{max} - v_{min}}{y_{max} - y_{min}}\right) \cdot T(-x_{min}, -y_{min})$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & u_{min} \\ 0 & 1 & v_{min} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{u_{max} - u_{min}}{x_{max} - x_{min}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v_{max} - v_{min}}{y_{max} - y_{min}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_{min} \\ 0 & 1 & -y_{min} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{u_{max} - u_{min}}{x_{max} - x_{min}} & 0 & -x_{min} \cdot \frac{u_{max} - u_{min}}{x_{max} - x_{min}} + u_{min} \\ 0 & \frac{v_{max} - v_{min}}{y_{max} - y_{min}} & y_{min} \cdot \frac{v_{max} - v_{min}}{y_{max} - y_{min}} + v_{min} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La transformación ventana-viewport también puede combinarse con rutinas de recorte (clipping) en relación al tamaño de la ventana.



Las primitivas de salida en coordenadas del mundo son recortadas en relación al marco de la ventana. El remanente es mostrado en el viewport.

2.5 Transformaciones de la composición general y de eficiencia computacional

Procesamiento de Imágenes

Una imagen digital es una representación rasterizada de una imagen en 2D definida como un arreglo de puntos (pixeles).

AWT

- Una imagen es representada por la clase Image.
- Se utiliza el modelo de empuje para imágenes.
- AWT utiliza dos objetos: Productor y Consumidor (ImageProducer e ImageConsumer). Un productor actua como el origen de una imagen y el consumidor la recibe para presentarlas en un dispositivo rasterizador.

Java2D

- Una imagen es representada por la clase BufferedImage
- Se utiliza el modelo inmediato.
- Un BufferedImage contiene un Raster y un ColorModel.

Carga de imagenes en Java2D

- Para leer una imagen de un archivo:

BufferedImage bi = ImageIO.read(file);

- Una imagen puede ser manipulada utilizando operaciones de procesamiento de imágenes

Para las siguientes operaciones:

- f(x,y) representa un pixel de la imagen original
- g(x,y) representa el pixel de la imagen resultante

RescaleOp

Ejecuta un escalado pixel por pixel.

$g(x, y) = af(x, y) + b$

ColorConverOp

Ejecuta una conversión de colores.

LookupOp

Ejecuta una conversión de pixeles basado en una tabla de búsqueda

g(x, y) = T(f(x, y))

2.6 Representación matricial de transformaciones tridimensionales

La representación de transformaciones bidimensionales como matrices de 3x3 tiene un equivalente para las transformaciones tridimensionales, las cuales son representadas como matrices de 4x4.

Para permitir esto, el punto (x,y,z) será representado en coordenadas homogéneas como (W.x, W.y, W.z, W), con W ≠ 0.

Si W ≠ 1, entonces W es dividido dentro de las tres primeras coordenadas homogéneas para así obtener el punto cartesiano tridimensional (x,y,z).

Esto implica, que dos puntos homogéneos H1 y H2 son el mismo punto tridimensional sí y solo sí H1 = c.H2, para cualquier constante c ≠ 0.

Este tipo de sistema es el más conveniente cuando se piensa en gráficos tridimensionales, ya que se puede dar una interpretación natural de los aquellos valores de z que se encuentran muy distantes del observador.

Además, es más lógico superponer este tipo de sistema sobre la cara del plano de visualización (display).

Traslación: La matriz de traslación tridimensional es una simple extensión de la bidimensional:

$$(Dx, Dy, Dz) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & Dx \\ 0 & 1 & 0 & Dy \\ 0 & 0 & 1 & Dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Escalamiento:

La matriz de escalamiento es similarmente extendida:

$$S(Sx, Sy, Sz) = \begin{vmatrix} Sx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Sz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

y al multiplicarla por el vector de puntos, queda:

$$S(Sx, Sy, Sz) \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x \cdot Sx \\ y \cdot Sy \\ z \cdot Sz \\ 1 \end{vmatrix}$$

Rotación:

La rotación bidimensional es justo una rotación con respecto al eje z. En tres dimensiones, una rotación con respecto al eje z es:

$$Rz(\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Esto es fácilmente verificable: una rotación de 90 grados del vector unitario x, produce el vector unitario y. Al multiplicar Rz

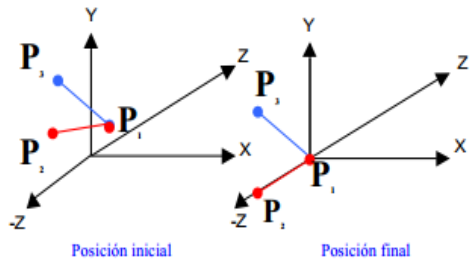
(θ), con θ=90, por el vector unitario x:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{Rz(90)} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}}_{y} = y$$

2.7 Composición de transformaciones tridimensionales

La composición de las tres transformaciones básicas tridimensionales pueden generar diferentes resultados.

El objetivo es transformar los segmentos de recta P1P2 y P1P3 de la figura que se encuentra a continuación, desde la posición inicial a la posición final.



El punto P1 ha sido trasladado al origen, P1P2 se encuentra en el lado positivo del eje z, P1P3 se encuentra en el plano (y,z). Las longitudes de las rectas no son afectadas por la transformación.

La transformación puede ser hecha en 4 pasos:

Paso 1: Trasladar P1 al origen

$$T(-x1,-y1,-z1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -x1 \\ 0 & 1 & 0 & -y1 \\ 0 & 0 & 1 & -z1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Aplicando la matriz de transformación T a P1, P2 y P3 se obtiene

$$T(-x1,-y1,-z1)\cdot P_1 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = P_1' \quad (1)$$

$$T(-x1,-y1,-z1)\cdot P_2 = \begin{vmatrix} x2-x1 \\ y2-y1 \\ z2-z1 \\ 1 \end{vmatrix} = P_2' \quad (2)$$

$$T(-x1,-y1,-z1)\cdot P_3 = \begin{vmatrix} x3-x1 \\ y3-y1 \\ z3-z1 \\ 1 \end{vmatrix} = P_3' \quad (3)$$